



# A IMPORTÂNCIA DO USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS PROCESSOS EDUCATIVOS EM ÁLGEBRA LINEAR

*Renan Marcelo da Costa Dias<sup>1</sup>*

*João Claudio Brandemberg<sup>2</sup>*

## RESUMO

O presente artigo contém elementos de uma pesquisa de mestrado e tem por objetivo responder a seguinte questão: Que aspectos intrínsecos aos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear sinalizam a importância de uma abordagem didática desses conceitos balizada pela História da Matemática? Para tal, realizou-se uma pesquisa bibliográfica em autores que discutem as dificuldades encontradas pelos estudantes quando estes lidam com os conceitos de Dependência e Independência Linear e ainda em estudiosos que tratam do papel do formalismo e da axiomatização nos processos educativos em Álgebra Linear. Apesar das linguagens formal e axiomática serem apontadas pela literatura brasileira como fatores complicadores da compreensão dos conceitos em foco, na verdade configuram-se em elementos chave da disciplina, uma vez que possibilitam o entendimento do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, o qual desponta de sua própria constituição histórico-epistemológica. Desse modo, o desafio do professor consiste em emprestar funcionalidade a esse formalismo e a essa axiomatização e, desse modo, a História da Matemática emerge como um importante provedor de recursos didáticos para este fazer.

**Palavras-chave:** História da Matemática. Álgebra Linear. Dependência e Independência Linear.

## THE IMPORTANCE OF USING THE HISTORY OF MATHEMATICS IN EDUCATIONAL PROCESSES IN LINEAR ALGEBRA

### ABSTRACT

This article contains elements of a master's research and aims to answer the following question: What aspects intrinsic to the teaching and learning processes of the

---

<sup>1</sup> Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará (UFPA). Docente da Universidade da Amazônia (UNAMA) e da Secretaria de Educação (SEDUC/PA). Grupo de Estudos e Pesquisas em História e Ensino de Matemática (GEHEM). Orcid iD: <https://orcid.org/0000-0002-4305-9948>. E-mail: [renanmarcelo1998@gmail.com](mailto:renanmarcelo1998@gmail.com)

<sup>2</sup> Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande de Norte (UFRN). Docente Associado IV da Universidade Federal do Pará (UFPA). Docente do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Grupo de Estudos e Pesquisas em História e Ensino de Matemática. Orcid iD: <https://orcid.org/0000-0001-8848-3550>. E-mail: [brand@ufpa.br](mailto:brand@ufpa.br)

concepts of Dependence and Linear Independence indicate the importance of a didactic approach to these concepts based on the History of Mathematics? To this end, bibliographic research was carried out on authors who discuss the difficulties encountered by students when they deal with the concepts of Linear Dependence and Independence and also on scholars who deal with the role of formalism and axiomatization in educational processes in Linear Algebra. Although formal and axiomatic languages are pointed out by Brazilian literature as complicating factors in understanding the concepts in focus, in fact they are key elements of the discipline, since they enable the understanding of the unifying and generalizing character of Linear Algebra, which emerges of its own historical-epistemological constitution. In this way, the teacher's challenge is to lend functionality to this formalism and this axiomatization, and, in this way, the History of Mathematics emerges as an important provider of didactic resources for this doing.

**Keywords:** History of Mathematics. Linear Algebra. Linear Dependence and Independence.

## LA IMPORTANCIA DEL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS PROCESOS EDUCATIVOS EN ÁLGEBRA LINEAL

### RESUMEN

Este artículo contiene elementos de una investigación de maestría y pretende dar respuesta a la siguiente interrogante: ¿Qué aspectos intrínsecos a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de Dependencia e Independencia Lineales indican la importancia de un abordaje didáctico de estos conceptos a partir de la Historia de las Matemáticas? Para ello, se realizó una investigación bibliográfica sobre autores que discuten las dificultades encontradas por los estudiantes cuando tratan los conceptos de Dependencia e Independencia Lineal y también sobre estudiosos que tratan sobre el papel del formalismo y la axiomatización en los procesos educativos en Álgebra Lineal. Aunque los lenguajes formales y axiomáticos sean señalados por la literatura brasileña como factores que complican la comprensión de los conceptos en foco, de hecho son elementos clave de la disciplina, una vez que posibilitan la comprensión del carácter unificador y generalizador del Álgebra Lineal, que emerge de su propia constitución histórico-epistemológica. De esta forma, el desafío del docente es dotar de funcionalidad a este formalismo y a esta axiomatización y, de esta manera, la Historia de las Matemáticas emerge como una importante proveedora de recursos didácticos para este hacer.

**Palabras clave:** Historia de las Matemáticas. Álgebra Lineal. Dependencia e Independencia Lineal.

### CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nos últimos 10 anos, os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear têm ganhado novos e maiores espaços de discussão em pesquisas desenvolvidas no campo da Educação Matemática no Brasil. Para

Celestino (2000), a importância dessa disciplina e das pesquisas que as envolvem configura-se no fato de que ela se encontra subjacente a quase todos os campos da Matemática, e assim, é de fundamental importância dominar seus principais conceitos.

Nos cursos de Licenciatura em Matemática, a especificidade da Álgebra Linear consiste em oportunizar o primeiro contato do estudante com o rigor e o formalismo necessário no estudo de objetos matemáticos, em que o professor exige demonstrações e/ou argumentos explicativos de procedimentos e de concepções conceituais adotadas. Contudo, muitos deles se veem impossibilitados em desenvolver tais habilidades, e recorrem a memorização na garantia de suas aprovações (DORIER, 1998).

Segundo Dorier *et al.* (1994), o primeiro contato dos alunos com a disciplina Álgebra Linear, em termos gerais, não ocorre de maneira muito tranquila, uma vez que eles têm a sensação de estar pousando em um planeta totalmente diferente e não conseguem encontrar caminhos neste novo mundo. As principais críticas proferidas por esses novos habitantes estão relacionadas ao grande número de novas definições, a falta de conexão com conteúdos anteriores e ainda o formalismo utilizado em seu estudo.

Ainda em acordo com Dorier *et al.* (1994), como forma de amenizar tais críticas, os professores tendem a minimizar a presença do formalismo na condução da disciplina e priorizam aspectos algorítmicos e operacionais em suas tarefas. No entanto, tal abordagem acarreta uma formação deficiente, haja vista que, apesar de conseguirem resolver tais tarefas, os alunos apresentam lacunas significativas na compreensão conceitual de noções elementares, dentre as quais, Dependência e Independência Linear.

Diante desse cenário, a busca por recursos ou metodologias que contribuam para uma compreensão conceitual com significado nos processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear se faz necessária e de extrema importância na formação inicial do professor de Matemática. Com efeito, se faz pertinente de antemão investigar os principais aspectos inerentes a esses processos para, em seguida, explorar mecanismos didáticos que possibilitem sua produção (BRANDEMBERG, 2017; 2018).

Nesse contexto, apresentamos configurações dos próprios processos educativos, de ensino e de aprendizagem, em Álgebra Linear que explicitam a importância do uso de elementos da História da Matemática como 'recursos didáticos' que promovam uma compreensão conceitual com significado das noções de Dependência e Independência Linear. Tal propósito materializa-se na seguinte questão: Que aspectos intrínsecos aos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear sinalizam a importância de uma abordagem didática desses conceitos balizada pela História da Matemática?

A fim de possibilitar uma leitura clara e objetiva, este trabalho contempla a seguinte organização. Com exceção das considerações iniciais e considerações finais, o corpus do texto está dividido em quatro seções. Na primeira seção, com base em teses e dissertações brasileiras, discutimos os principais obstáculos encontrados pelos estudantes quando estes lidam com os conceitos de Dependência e Independência Linear.

Na segunda seção, discorreremos acerca do papel do formalismo e da axiomatização no processo de constituição histórica da Álgebra Linear, assim como a sua refletividade nos atuais processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina.

Na terceira seção, argumentamos em favor da inserção de aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência em cursos de Álgebra Linear, alicerçados em especificidades do próprio processo de ensino e de aprendizagem e que sinalizam a importância de sua utilização.

Na quarta seção, apresentamos o exemplo de um elemento extraído da História da Matemática, que pode ser abordado em sala de aula na forma de um 'recurso didático' que possibilite a compreensão conceitual com significado dos conceitos em discussão por licenciandos em Matemática.

## **OS CONCEITOS DE (IN)DEPENDÊNCIA LINEAR NA LITERATURA BRASILEIRA**

Com o propósito de compreender mais a fundo os obstáculos apontados pela literatura no que se refere à aprendizagem dos conceitos de

Dependência e Independência Linear, realizamos uma revisão em teses e dissertações brasileiras que tenham investigado a referida temática entre os anos de 2000 e 2020. Os repositórios digitais da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) constituíram-se em fontes nas quais os procedimentos de pesquisa foram executados.

A chave de busca utilizada foi 'Dependência e Independência Linear' e nos detivemos em produções desenvolvidas em Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, Educação em Ciências e Matemáticas, Ensino de Ciências e Matemáticas e afins. Ao final do levantamento, foi possível observar que estudos dessa natureza têm sido desenvolvidos de maneira pontual, uma vez que obtivemos um total de três dissertações de mestrado, a saber, Grande (2006), Andrade (2010) e Souza (2016). A leitura desses trabalhos pautou-se na identificação dos obstáculos à compreensão dos conceitos em foco apontados pela literatura.

O estudo de Grande (2006) teve por objetivo investigar quais são os registros de representação semiótica mais utilizados em livros didáticos de Álgebra Linear com relação aos conceitos de Dependência e Independência Linear. A fim de obter base à sua análise, Grande (2006) realizou uma investigação do desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, e ainda um levantamento das dificuldades dos alunos quando estes lidam com os conceitos supracitados, na perspectiva da literatura internacional, haja vista seu pioneirismo no Brasil sobre o tema.

De maneira geral, Grande (2006) evidenciou que a dificuldade mais comum nos conceitos de Dependência e Independência Linear diz respeito a incapacidade dos alunos em transpor esses conceitos a outros contextos como geometria, funções, matrizes etc., considerando-se que eles conseguem aplicar esse conhecimento apenas nas  $n$ -uplas, a partir de um algoritmo memorizável. Para Grande (2006), estas dificuldades estão intimamente ligadas à incompreensão do caráter unificador e generalizante possibilitado pelo aspecto formal da disciplina, que por sua vez pode ser

observado no desenvolvimento histórico das noções de Dependência e Independência Linear.

Andrade (2010) investigou os requisitos necessários ao desenvolvimento de softwares educativos que amparassem a aprendizagem à distância dos conceitos de Dependência e Independência Linear, a partir da elaboração de um instrumento para levantar as dificuldades de aprendizagem nesses conceitos. Em sua análise, Andrade (2010) percebeu que a visualização dos conceitos de Dependência e Independência Linear como procedimento e não como uma relação entre vetores configura-se como uma das principais dificuldades identificadas.

Ainda segundo Andrade (2010, p. 67), essa situação caracteriza-se como confusão entre procedimento e objeto, cujo a natureza está diretamente relacionada ao excesso do formalismo e abstração inerentes aos objetos da Álgebra Linear, que por sua vez não permitem a compreensão propriamente dita dos conceitos de Dependência e Independência Linear, mas sim o tratamento operacional dado a eles em sua verificação. Assim como Grande (2006), Andrade (2010) pontua o formalismo exacerbado das definições como obstáculo à compreensão do caráter unificador e generalizante dos objetos da Álgebra Linear.

Souza (2016) investigou as dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática com relação aos conceitos de Dependência e Independência Linear por meio da aplicação de um questionário. Em suas análises, a autora percebeu que as dificuldades estavam atreladas tanto à natureza da Álgebra Linear quanto aos aspectos subjetivos dos alunos. Quanto às dificuldades particulares à natureza da disciplina, foram elencadas quatro subcategorias: linguagem; entendimento dos conceitos; Identificação de conjuntos linearmente dependentes e conjuntos linearmente independentes e reconhecimento da representação gráfica.

Os resultados pontuados por Souza (2016) subjazem a dificuldade dos alunos em transitar por diferentes tipos de registros de vetores Linearmente Dependentes e Independentes, bem como de compreender esses conceitos em outros objetos diferentes das tradicionais  $n$ -uplas. Ademais, para Souza

(2016), as dificuldades envolvendo os conceitos em questão estão diretamente relacionadas ao caráter formal com que eles são apresentados, haja vista que para o aluno esse formalismo não faz sentido algum e, eventualmente, o conduz a memorização de procedimentos sem compreendê-los.

Diante dos estudos supracitados, foi possível observar que a principal dificuldade na compreensão dos conceitos de Dependência e Independência Linear, pontuada pela literatura, diz respeito ao fato dos alunos não os visualizar em diferentes registros de representação semiótica (GRANDE, 2006; SOUZA, 2016), assim como em outros objetos matemáticos que não as tradicionais  $n$ -uplas (ANDRADE, 2010).

Contudo, se faz necessário esclarecer que, apesar de a literatura brasileira apontar o formalismo e a axiomatização como elementos complicadores da compreensão dos conceitos de Dependência e Independência Linear, estes na verdade exerceram papel fundamental da constituição histórica da Álgebra Linear enquanto campo disciplinar, e ainda tem sido apontado por autores como elementos essenciais para o entendimento do caráter unificador e generalizante da disciplina. Assim, na próxima seção, discutimos de maneira mais acentuada suas naturezas, funcionalidades e importâncias nos processos educativos da disciplina.

## **O FORMALISMO NOS PROCESSOS EDUCATIVOS EM ÁLGEBRA LINEAR**

Conforme vimos discutindo, a linguagem formal (e axiomática) com a qual os conceitos de Dependência e Independência Linear são trabalhados em cursos de licenciatura em Matemática é visualizada como sendo um aspecto problemático que impossibilita a compreensão do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear. Contudo, é necessário ressaltar que essa linguagem emergiu de sua própria constituição a partir do século XIX, tendo em vista seu potencial em unificar diferentes métodos e ferramentas existentes e generalizando-as (DORIER, 1998).



Dorier (1995a) concebe a teoria dos espaços vetoriais como um exemplo de teoria unificadora e generalizante, haja vista sua concepção de conceitos dessa natureza, a saber,

Conceitos unificadores e generalizantes unificam e generalizam diferentes métodos, ferramentas e objetos, que existiam anteriormente em uma variedade de ambientes. Este tipo de conceito é então um conceito formal que unifica os vários objetos dos quais foi abstraído. Não foi necessariamente criado para resolver novos problemas, mas para tornar a solução de muitos problemas mais fácil ou mais semelhantes entre si (DORIER, 1995a, p. 177, tradução nossa).

Desse modo, podemos observar que a linguagem formal (e axiomática) exerce um papel fundamental nos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos da Álgebra Linear, uma vez que ela possibilita ao estudante compreender o caráter unificador e generalizante da referida disciplina (ou subárea do conhecimento) por meio da visualização de diferentes objetos matemáticos em diversos contextos como elementos coesivos passíveis de generalização, mediante características comuns entre si. Esses aspectos podem ser visualizados na constituição histórica da Álgebra Linear.

O tratamento intuitivo de equações lineares no início do século XVIII foi o marco inicial da emergência de conceitos da Álgebra Linear. Entretanto, a adoção dos determinantes em problemas de linearidade resultou em uma superposição do caráter operatório em detrimento do intuitivo e não permitiu que novas ideias pudessem ser descobertas. Posteriormente, com a unificação das equações e  $n$ -uplas com relação a linearidade, os determinantes foram usados com mais ênfase em problemas desse tipo, e forneceram bases para a constituição das matrizes, que tiveram papel fundamental na representação das transformações lineares (DORIER, 2000).

A geometria também se constituiu como terreno no qual as ideias relacionadas à Álgebra Linear foram germinadas. A busca por um cálculo geométrico intrínseco proposto por Leibniz (1645 – 1716) foi perseguida por muitos matemáticos e possibilitou grandes contribuições ao cálculo vetorial e até mesmo aos espaços vetoriais. Os esforços empreendidos pelos matemáticos na representação das quantidades imaginárias para a sua legitimação foi de grande valia, haja vista que culminou no nascimento dos



sistemas de William Hamilton (1805 – 1865) e de Hermann Grassmann (1809 – 1877). Tais sistemas, de modo geral, foram tomados como subsídios por outros matemáticos para as primeiras noções axiomáticas em Álgebra Linear (DORIER, 2000).

Apesar de Grassmann ter definido alguns conceitos da Álgebra Linear de forma generalizada, as suas abordagens axiomáticas tiveram que ser redescobertas outras duas vezes para que finalmente fossem aceitas. Na segunda vez, os espaços vetoriais sobre os números reais foram denominados de sistemas lineares e foram apresentados por meio de uma abordagem axiomática possível de evidenciar suas aplicabilidades e pertinência diante dos problemas da época. Contudo, muitos desses trabalhos não ultrapassaram os muros de seus países de origem, e assim, não obtiveram uma grande notoriedade diante da comunidade acadêmica (MOORE, 1995).

Os espaços vetoriais foram redescobertos uma terceira vez no contexto da análise funcional por meio de uma abordagem axiomática que permitiu a unificação e generalização de diversos conceitos, dentre os quais, o de função. Paralelamente a isso, Álgebra Moderna foi o contexto de amadurecimento e consolidação da definição de espaço vetorial como um módulo topológico sobre um anel. Essa definição permitiu que a Álgebra Linear fosse concebida como a área que estuda os módulos sobre um anel e seus homomorfismos (transformações lineares), os quais são representados por matrizes quando o módulo tem uma base finita (MOORE, 1995).

De fato, a partir dos escritos de Moore (1995) e Dorier (2000), é possível observar que apesar da Álgebra Linear ser concebida como uma disciplina relativamente nova no meio acadêmico, os conteúdos que a compõem têm suas origens desde os tempos das civilizações antigas e suas raízes encontram-se em diversos contextos e momentos da História da Matemática. Este fato ratifica a conceituação dada por Dorier (1995a; 1998) como uma disciplina unificadora e generalizante de conceitos e objetos existentes ao longo do tempo, e assim explicita a linguagem formal (e axiomática) como ferramenta universal e necessária para o fazê-lo.

No entanto, para Dorier (1995a; 1998) a praticidade do formalismo e da axiomatização da Álgebra Linear não é de fácil entendimento ao estudante, uma vez que para isso seria necessário que ele conhecesse todos os contextos matemáticos que a subsidiaram. O desafio do professor, portanto, concretiza-se em dar um aspecto funcional ao formalismo como sendo único meio de compreender diferentes aspectos anteriores dentro de uma mesma linguagem, por meio de uma noção mais intuitiva, para que o estudante consiga visualizá-lo em qualquer objeto matemático compreendido como um elemento do espaço vetorial, tais como funções, matrizes e polinômios.

Nesse contexto, Dorier (1995a) distingue duas etapas na construção de um conceito unificador e generalizante, que segundo ele correspondem a dois processos mentais na aprendizagem: (I) O reconhecimento de semelhanças entre objetos, ferramentas e métodos dá vida ao conceito unificador e generalizante e (II) A explicitação do conceito unificador e generalizante como objeto induz uma reorganização de antigas competências e elementos do conhecimento. Desse modo, a linguagem formal e axiomática deve ser apresentada como resposta a um problema que os estudantes são capazes de compreender e fazer por conta própria.

A ideia, portanto, consiste em inserir o estudante em uma atividade matemática na qual ele possa resolver e ao mesmo tempo refletir sobre algumas possibilidades de generalização e unificação. Para Dorier (1998), isso implica não somente em dar exemplos de objetos diferentes em distintos contextos, mas também em mostrar como todos esses exemplos estão conectados e qual é o papel dos conceitos formais em relação a atividade matemática envolvida nas tarefas, para que assim ele compreenda a importância de todo esse formalismo no estudo da Álgebra Linear.

Sendo assim, tendo em vista as dificuldades na compreensão dos conceitos de Dependência e Independência Linear elencadas por Grande (2006), Andrade (2010) e Souza (2016), e ainda a imprescindibilidade do formalismo na visualização do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear apontada nos estudos de Dorier *et al.* (1994) e Dorier (1995a; 1998), levantamos a hipótese de que a visualização do caráter unificador e

generalizante das noções de Dependência e Independência Linear poderia contribuir para a compreensão desses conceitos com mais significado pelos alunos.

Vemos na História da Matemática elementos de uma interessante alternativa didática para explicitar o caráter unificador e generalizante das noções de Dependência e Independência Linear, bem como compreender a importância do formalismo em tais processos, na medida em que serão fornecidos aos alunos subsídios histórico-epistemológicos à uma compreensão conceitual com significado.

Questões sobre a concepção histórica adotada, o modo como essa história pode ser inserida e suas relações intrínsecas com os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear são mais bem discutidas na próxima seção.

## **SOBRE O USO DA HISTÓRIA NO ENSINO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS**

Muitos estudiosos têm defendido as contribuições que ações docentes balizadas em elementos (aspectos) da História da Matemática possibilitam aos processos de ensino e de aprendizagem desta disciplina, tais como Miguel e Miorim (2004); Miguel (1993); Mendes (2006; 2016) e Brandemberg (2017; 2018). Um dos destaques desses trabalhos diz respeito ao fato de que uma abordagem didática amparada na história fornece significado aos conteúdos matemáticos na medida que se compreende os motivos que levaram à sua constituição, o contexto histórico, social e cultural das quais eles emergiram e ainda as implicações que culminaram em suas configurações atuais.

Para Miguel (1993, p. 76), é possível buscar na História da Matemática elementos que conduzam o aluno a perceber a Matemática como uma criação humana, que a curiosidade estritamente intelectual pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias e ainda a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização ou de uma prova. Tais elementos, assim, possibilitam evidenciar a Álgebra Linear como uma criação da humanidade, proveniente da necessidade em unificar e generalizar diferentes métodos e

objetos matemáticos, a fim que se compreenda o papel exercido pelo formalismo na abordagem desses conceitos.

Essas ideias encontram suporte quando D'Ambrosio (1999, p. 97) ratifica o papel da Matemática na evolução da humanidade

As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as suas formas de fazer e de saber (D'AMBROSIO, 1999, p. 97).

Nesse sentido, é possível observar que a História da Matemática acompanha a existência da própria humanidade e sua razão de ser no mundo, ao mesmo tempo em que oportuniza a desmistificação de uma Matemática fria, ideal, infalível e absoluta.

Com esse propósito muitos estudiosos têm defendido a busca de aspectos problematizadores dessas 'histórias', os quais possam ser vetorizados em sala de aula, na forma de exercícios problematizadores de (re)descoberta e de (re)construção conceitual, conforme expressam os estudos de Miguel e Miorim (2004); Mendes (2006; 2016) e Brandemberg (2017; 2018).

Miguel e Miorim (2004) defendem que as 'histórias' podem e devem constituir pontos de referência para a problematização desde que sejam devidamente constituídas para fins explicitamente pedagógicos e organicamente articuladas com as demais variáveis que intervêm no processo de ensino e de aprendizagem escolar da Matemática. Nesse viés, Mendes (2006; 2016) defende que a História da Matemática adequada a ser inserida em sala de aula trata-se do desenvolvimento histórico e epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas na educação básica e no ensino superior.

Para Brandemberg (2017; 2018) a adoção da História da Matemática como provedora de 'recursos didáticos' objetiva emprestar significado contextual aos conteúdos abordados nos cursos de licenciatura em Matemática e servir como elemento de motivação para o desenvolvimento

conceitual do estudante. Para Brandemberg (2018, p. 4) uma das formas de realizar essa prática é a elaboração de atividades de cunho histórico como, por exemplo, apresentar aspectos do desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos em estudo.

Desse modo, para que essas 'histórias' possam ser vetorizadas na forma de exercícios problematizadores que promovam a construção conceitual dos objetos matemático, se faz necessário construí-las e disponibilizá-las aos professores para que estes adequem ao nível cognitivo dos alunos, à realidade da sala de aula e aos seus objetivos. Nesse contexto, defendemos a possibilidade de inserir aspectos do desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, em seu caráter unificador e generalizante, na forma de exercícios problematizadores de (re)descoberta e (re)construção conceitual conforme sugerido por Mendes (2006; 2016) e Brandemberg (2017; 2018).

O papel que a História da Matemática pode exercer nos processos educativos, de ensino e de aprendizagem, em Álgebra Linear aparece de maneira mais explícita quando Coimbra (2008) destaca o desconhecimento da História da Matemática como sendo um dos aspectos problemáticos nesses processos. Para Coimbra (2008, p. 34), o conhecimento histórico da Álgebra Linear é de grande importância para a sua compreensão enquanto ideia unificadora, a qual não pode faltar ao professor e deve estar presente em todos os momentos para que os alunos percebam toda a sua extensão e não tenham uma visão parcial e deformada do assunto.

Visualizamos uma História da Matemática que pode auxiliar o professor de Matemática na explicitação do caráter unificador e generalizante das noções de Dependência e Independência Linear, tendo em vista sua especificidade em fornecer aspectos (elementos, processos, algoritmos) que elucidem a necessidade da criação dos conceitos em questão como linguagem universal aos conhecimentos da época.

Nosso propósito é que estes aspectos possam ser vetorizados em sala de aula na forma de exercícios problematizadores de (re)construção e (re)descoberta, nos quais os alunos valorizem o viés axiomático da disciplina

e compreendam o formalismo como linguagem fundamental com a qual os objetos da Álgebra Linear devem ser trabalhados.

A fim de materializar nossas colocações quanto à inserção de aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear em cursos de Álgebra Linear, na próxima seção apresentamos o exemplo de um elemento extraído da história da constituição do referido campo disciplinar, o qual pode ser abordado em sala de aula, visando uma compreensão conceitual com significado dos conceitos em discussão.

### LEONHARD EULER E A NOÇÃO DE DEPENDÊNCIA INCLUSIVA

Conforme apresentado inicialmente, este trabalho figura o recorte de uma pesquisa de mestrado, na qual investigou-se de que forma diferentes noções, concebidas por matemáticos ao longo do tempo e do espaço e que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, poderiam ser inseridas em processos educativos, de ensino e de aprendizagem, em Álgebra Linear, de modo a viabilizar uma compreensão conceitual com significado aos licenciados em Matemática.

As noções matemáticas, isto é, os elementos da História da Matemática, identificadas ao longo do decurso do processo investigatório podem ser visualizadas com maiores detalhes em Dias (2022). Nesta seção, contudo, apresentamos a noção de Dependência Inclusiva desenvolvida por Leonhard Euler (1707 – 1783) em 1750.

Euler foi o primeiro matemático a lançar um olhar mais intuitivo sobre os sistemas de equações lineares a partir da publicação, em 1750, de sua obra intitulada *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Ligna Courbes*, na qual ele estudou o conhecido paradoxo de Cramer e a premissa de que um sistema linear de  $n$  equações e  $n$  incógnitas teria uma única solução. Euler percebeu que nem sempre isso era verdade, e para demonstrá-lo fez um estudo analítico e intuitivo de sistemas de equações em que o número de incógnitas era igual ao número de equações e chamou atenção para um 'incidente' (DORIER, 2000).

Euler tomou, inicialmente, um sistema contendo duas equações, sejam elas,  $3x - 2y = 5$  e  $4y = 6x - 10$ , e evidenciou que ao tentar resolvê-lo por eliminação e substituição uma incógnita sempre permaneceria indeterminada e salientou o motivo de tal acontecimento:

Veremos que não é possível determinar as duas incógnitas  $x$  e  $y$ , pois ao eliminar um  $x$ , a outra desaparece sozinha e obtemos uma equação idêntica da qual nada podemos determinar. A razão para este incidente é primeiro óbvia, uma vez que a segunda equação muda para  $6x - 4y = 10$ , que sendo apenas a primeira  $3x - 2y = 5$  dobrada, não difere dela (EULER, 1750 *apud* DORIER, 2000, p. 7, tradução nossa).

Segundo Dorier (1995b, p. 229), é bem verdade que uma observação trivial como esta, mesmo para a época, fosse notada por outros matemáticos, porém não era suficiente para justificar tal incidente. Este fato, segundo o autor, evidencia o motivo que fez com que Euler tivesse que resolver o sistema para provar suas conjecturas, além do que permite-nos observar que a solução de um sistema era sua real preocupação. Euler ainda apresentou outros exemplos com três equações, sendo um exemplo com duas equações semelhantes e outro em que uma era o dobro da soma das outras duas, porém ao invés de resolvê-los, ele concluiu que:

Então, quando dizemos que para determinar três incógnitas, basta ter três equações, devemos adicionar esta restrição, que essas três equações diferem tanto uma das outras que nenhuma já esteja incluída nas outras (EULER, 1750 *apud* DORIER, 2000, p. 8, tradução nossa).

Euler ainda discutiu um exemplo com um sistema contendo quatro equações e observou que, nesse caso, duas incógnitas poderiam não ser determinadas (DORIER, 1995b). Ele tomou o seguinte sistema

$$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$$

$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$$

$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$$

$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$$

e ao resolvê-lo percebeu que valeriam apenas duas equações, pois tendo trabalhado com a terceira chegou ao seguinte resultado

$$x = -13y + 14z - 15v - 16$$



e após substituí-lo na segunda equação, obteve

$$y = \frac{33z - 36v - 52}{29} \text{ e } x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}$$

A substituição do valor de  $x$  e  $y$  na primeira e na quarta equação levaria a equações idênticas, ou seja, as incógnitas  $z$  e  $v$  permaneceriam indeterminadas. Novamente percebemos que a prova de Euler é dada em função da resolução do sistema por eliminação e substituição, porém este não salienta nenhuma relação linear entre as equações, apesar de ser possível observar que a diferença entre a primeira e a segunda equação resulta na quarta, ou ainda que a diferença entre a primeira e o dobro da segunda resulta na terceira (DORIER, 1995b).

Após apresentar e discutir todos esses exemplos, Euler apresentou uma condição a ser inserida na premissa de que em um sistema de  $n$  equações  $n$  incógnitas seriam suficientes para determiná-las:

Quando sustentamos que, para determinar  $n$  quantidades desconhecidas, é suficiente ter  $n$  equações que expressam sua relação mútua, devemos adicionar a restrição de que todas as equações são diferentes umas das outras, ou de que nenhuma das equações está contida nas outras (EULER, 1750 *apud* DORIER, 1995b, p. 230, tradução nossa).

Assentados em uma visão moderna da Álgebra Linear, visualizaríamos o termo 'uma equação contida nas outras', empregado por Euler, como o atual conceito de Dependência e Independência Linear, entretanto, tais conceitos referem-se a uma relação entre vetores emergentes de diferentes naturezas, enquanto que a noção trabalhada por Euler está imersa em um contexto particular de equações. Assim, Dorier (1995b; 2000) defende que Euler, em seus trabalhos sobre sistema de equações, apresentou a noção de Dependência Inclusiva.

Tais dependências se equivalem quando trabalhadas no contexto das equações, porém a de Euler é mais local e a noção de Dependência e Independência Linear carrega consigo um caráter unificador e generalizante, uma vez que unifica e generaliza essa definição de dependência para

demais objetos matemáticos, tais como  $n$ -uplas, matrizes e funções (DORIER, 1995b; 2000).

É válido lembrar que os estudos de Grande (2006), Andrade (2010) e Souza (2016) apontam que a principal dificuldade encontrada pelos alunos com relação aos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear constituiu-se no fato de não conseguir os visualizar em outros objetos que não as tradicionais  $n$ -uplas, e ainda que o formalismo e a axiomatização presentes na abordagem da Álgebra Linear são os fatores complicadores que ocasionam esses obstáculos didáticos.

Contudo, se faz necessário evocar também que, segundo estudiosos da constituição histórica da Álgebra Linear, como Dorier (1995a; 1998), o formalismo e a axiomatização exercem papel fundamental na compreensão desse campo disciplinar enquanto ideia unificadora e generalizante de diferentes métodos e técnicas existentes ao longo do tempo e do espaço. A refletividade dessa compreensão nos conceitos de Dependência e Independência Linear se faz de extrema importância para que os estudantes alcancem um entendimento conceitual com significado.

Nesse contexto, é possível observar que a inserção desses aspectos históricos concernentes a noção de Dependência Inclusiva de Euler em um primeiro curso de Álgebra Linear poderia trazer relevantes contribuições ao processo de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, haja vista que a abordagem de tais conceitos por meio do estudo da linearidade em equações encaminhará o aluno à compreensão da dependência como uma relação entre objetos (vetores) e não apenas como um procedimento de verificação executável a partir de um algoritmo memorizável.

Apesar de não termos apresentado as outras noções precedentes identificadas ao longo da História da Matemática, é importante salientar que, quando abordadas em sala de aula, para além de contribuir para que os estudantes possam compreender os conceitos de Dependência e Independência Linear como uma relação e não como um procedimento a ser verificado a partir de um algoritmo memorizável, o contato com cada uma delas oportuniza aos estudantes visualizar a linearidade em distintos objetos

e/ou contextos matemáticos, tais como  $n$ -uplas, equações, matrizes, polinômios, funções etc., e assim conceber seu caráter unificador e generalizante.

A inserção desta noção referente aos conceitos de Dependência e Independência Linear poderá contribuir ainda mais aos processos de ensino e de aprendizagem quando realizada sob a égide de atividades de cunho histórico, e os exercícios problematizadores de (re)descoberta e (re)construção conceitual surgem como uma forma interessante de o fazê-lo, na medida em que os alunos poderão obter subsídios epistemológicos que lhes permitam (re)construir os referidos conceitos a partir da revisita dos contextos histórico, social, cultural e matemático em que as diferentes noções foram concebidas.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão que norteou a construção do presente artigo foi a seguinte: Que aspectos intrínsecos aos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear sinalizam a importância de uma abordagem didática desses conceitos balizada pela História da Matemática? Em busca de respondê-la construímos um diálogo teórico com autores que discutem sobre os processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, em especial os conceitos de Dependência e Independência Linear, bem como com estudiosos que dissertam sobre o uso da História da Matemática em sala de aula.

Por meio de uma investigação nas produções da pós-graduação brasileira nos últimos 20 anos sobre a temática, foi possível observar que as principais dificuldades apontadas por esses trabalhos dizem respeito à impossibilidade dos alunos em compreender/reconhecer os conceitos de Dependência e Independência Linear em outros contextos/objetos que não as tradicionais  $n$ -uplas. Para esses autores, essa dificuldade está diretamente relacionada ao formalismo (e axiomatização) com o qual tais conceitos são

trabalhados, visto que os impede de conceber o caráter unificador e generalizante de tais noções e da Álgebra Linear como um todo.

Entretanto, ao estudar mais a fundo sobre o formalismo e sobre a axiomatização com o qual os conceitos da Álgebra Linear são trabalhados, percebemos que estes na verdade são elementos chave da disciplina, uma vez que configuraram uma linguagem universal e necessária à generalização e unificação de métodos e ferramentas existentes no século XIX. Esse fato, nos levou a refletir sobre a necessidade da compreensão do caráter unificador e generalizante da Dependência e Independência Linear, que por sua vez nos parece fundamental para que a aprendizagem desses conceitos seja efetivada pelo aluno com significado.

Nesse sentido, defendemos que elementos da História da Matemática podem se constituir em recursos didáticos a serem utilizados em tais processos, uma vez que oportuniza ao aluno a compreensão do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear – o qual desponta de sua própria constituição histórica e epistemológica – e que explicita a importância da linguagem axiomática e formal para a sua atual caracterização. Ademais, também discutimos o modo como essa história pode ser inserida em sala de aula, isto é, na forma de exercícios problematizadores de (re)construção conceitual.

A fim de materializar nossas colocações, apresentamos a noção de Dependência Inclusiva desenvolvida por Leonhard Euler no contexto dos sistemas de equações lineares no ano de 1750, a qual poderá contribuir para a compreensão da Dependência e Independência Linear como uma relação entre vetores e não como um simples procedimento. Projetamos que, abordar as demais noções históricas identificadas ao longo da constituição da Álgebra Linear poderá ampliar ainda mais o entendimento dos licenciandos em Matemática com relação a esses conceitos, discussão essa que se faz profícua para um próximo texto científico.

## REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. P. G. **Vetores**: Interações à distância para a aprendizagem de Álgebra Linear. 2010. 125f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife/PE, 2010.

BRANDEMBERG, J. C. História e Ensino de Matemática. **Revista Exitus**, [S. l.], v. 7, n. 2, p. 16-30, 2017. DOI: 10.24065/2237-9460.2017v7n2ID298. Disponível em: <http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/298/246>. Acesso em: 27 jul. 2022.

BRANDEMBERG, J. C. História e Ensino de Matemática: uma abordagem partindo do desenvolvimento histórico-epistemológico dos conteúdos. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2018, Belém. **Anais do V Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT)**. Belém: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2018.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear**: as pesquisas brasileiras na década de 90. 2000. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo/SP, 2000.

COIMBRA, J. L. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear**. 2008. 78f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém/PA, 2008.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 97-115.

DIAS, R. M. da C. **Um estudo acerca da inserção de aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear em cursos de Álgebra Linear**. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém/PA, 2022.

DORIER, J.; ROBERT, A.; ROBINET, J.; ROGALSKI, M. **Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University**. In the proceedings of the 18<sup>th</sup> conference of the international group for psychology of Mathematics, Lisbonne, v. 4, p. 137-144, 1994. Disponível em: <https://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-dorier-et-al.pdf>. Acesso em: 27 jul. 2022.

DORIER, J. Meta Level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 29, n. 02, p. 175-197, 1995a. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/226438971\\_Meta\\_level\\_in\\_the\\_tea](https://www.researchgate.net/publication/226438971_Meta_level_in_the_tea)

ching\_of\_unifying\_and\_generalizing\_concepts\_in\_mathematics. Acesso em: 27 jul. 2022.

DORIER, J. A General Outline of Genesis of Vector Space Theory. **Historia da Mathematica**, v. 22, n. 3, p. 227-261, 1995b. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086085710245>. Acesso em: 27 jul. 2022.

DORIER, J. The role of formalism in the teaching of theory of vector spaces. **Linear Algebra and its applications**, France, 275-276 (1998), p. 141-160, 1998. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/223201270\\_The\\_role\\_of\\_formalism\\_in\\_the\\_teaching\\_of\\_the\\_theory\\_of\\_vector\\_spaces](https://www.researchgate.net/publication/223201270_The_role_of_formalism_in_the_teaching_of_the_theory_of_vector_spaces). Acesso em: 27/07/2022.

DORIER, J. Epistemological Analysis of The Genesis of Theory of Vector Spaces. In: DORIER, J. (Org.). **On the Teaching of Linear Algebra**. Grenoble: Kluwer Academia Publishers, 2000, p. 1 – 73.

GRANDE, A. L. **O conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos de Álgebra Linear**. 2006. 208f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo/SP, 2006.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente de cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A. (Org.). **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006, p. 79-136.

MENDES, I. A. História da Matemática e reinvenção didática em sala de aula. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. (Org.). **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016, p. 11-74.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. 1993. 361f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP, 1993.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MOORE, G. H. The axiomatization of Linear Algebra: 1875 – 1940. **Historia Mathematica**, v. 22, n. 3, p. 262 – 303, 1995. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086085710257>. Acesso em: 27 jul. 2022.

SOUZA, M. L. **Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática**. 2016. 126f.



ISSN 2237-9460

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –  
Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR, 2016.

Recebido em: 05 de setembro de 2022.

Aprovado em: 22 de fevereiro de 2023.

Publicado em: 20 de março de 2023.

